Adı Soyadı:
Numarası:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**Toplam**

MAT478 ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİ FİNAL SINAVI (16.06.2022)

Soru1: $\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}\in IL^3$ olmak üzere $(\vec{X}*\vec{Y})*\vec{Z}=<\vec{Y},\vec{Z}>\vec{X}-<\vec{X},\vec{Z}>\vec{Y}$ olduğunu gösteriniz**(20 P.)**.

Soru 2: P_3' ün

$S=\{v_1=-x^3-1,\ \ v_2=-x-1,\ v_3=-x^2-x-2,\ v_4=-x^3+3x-1,\ \ v_5=-x^3-x^2-2x-1\}$

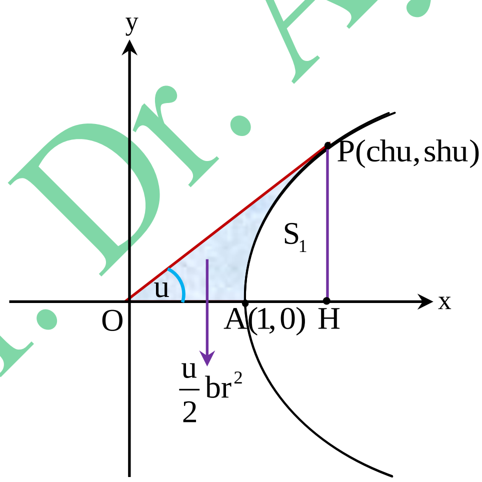
alt kümesi ile gerilen alt uzayı W olsun.

a) W alt uzayının bir tabanını bulunuz**(10 P.)**

b) W alt uzayının tabanını kapsayan P_3 ün bir tabanını bulunuz**(10 P.)**

Soru3: Euclid düzleminde hareketli $A,\ E$ ve sabit E' düzlemleri verilmiş olsun. Bu durumda E/E' hareketinin P pol noktası, A/E hareketinin Q pol noktası ve A/E' hareketinin Q' pol noktasının lineer bağımlı olup-olmadıklarını araştırınız. Eğer lineer bağımlı ise aralarındaki bağıntıyı bulunuz**(20 P.)**

Soru 4: $x^2-y^2=1$ Lorentz çemberi üzerindeki P noktasının koordinatları için kullanılan hiperbolik radyan açı u olmak üzere taralı bölgenin alanının $\frac{u}{2}br^2$ olduğunu gösteriniz.



Soru 5: A(lnu) matrisi yardımı ile $\vec{e}_1=(1,0)$, $\vec{e}_2=(0,1)$ birbirine dik olan iki vektörün $u=\ln 3$ kadar dönmeden sonra alacağı yeni konumlarını bulunuz ve dönmeden sonraki birbirlerine göre durumları ve boyları hakkında yorumu yapınız. $P(1,1)$ noktasının $A(ln3)$ dönme matrisi altında alacağı yeni konuma bakıp, geometrik yorumunu yapınız.

NOT: Süre 100 dakikadır.

Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAPLAR

CEVAP 1) $\left(\vec{X} * \vec{Y} *\right) * \vec{Z} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & -\overrightarrow{e_3} \\ x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & -(x_1y_2 - x_2y_1) \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$

$$= (z_3x_3y_1 - z_3x_1y_3 + z_2x_1y_2 - z_2x_2y_1)\overrightarrow{e_1}$$
$$+(z_3x_3y_2 - z_3x_2y_3 + z_1x_2y_1 - z_1x_1y_2)\overrightarrow{e_2}$$
$$+(z_2x_3y_2 - z_2x_2y_3 + z_1x_3y_1 - z_1x_1y_3)\overrightarrow{e_3}$$

elde edilir. I. terime $z_1x_1y_1$, II. terime $z_2x_2y_2$ ve III. terime de $z_3x_3y_3$ ifadelerini bir ekleyip bir çıkarırsak

$$\left(\vec{X} * \vec{Y} *\right) * \vec{Z} = (z_3x_3y_1 - z_3x_1y_3 + z_2x_1y_2 - z_2x_2y_1 + z_1x_1y_1 - z_1x_1y_1)\overrightarrow{e_1}$$
$$+(z_3x_3y_2 - z_3x_2y_3 + z_1x_2y_1 - z_1x_1y_2 + z_2x_2y_2 - z_2x_2y_2)\overrightarrow{e_2}$$
$$+(z_2x_3y_2 - z_2x_2y_3 + z_1x_3y_1 - z_1x_1y_3 + z_3x_3y_3 - z_3x_3y_3)\overrightarrow{e_3}$$
$$= (-x_1z_1 - x_2z_2 + x_3z_3)(y_1\,\overrightarrow{e_1} + y_2\,\overrightarrow{e_2} + y_3\,\overrightarrow{e_3}\,)$$
$$+(y_1z_1 + y_2z_2 - y_3z_3)(x_1\,\overrightarrow{e_1} + x_2\,\overrightarrow{e_2} + x_3\,\overrightarrow{e_3}\,)$$
$$= -< \vec{X},\ \vec{Z} > (y_1\,\overrightarrow{e_1} + y_2\,\overrightarrow{e_2} + y_3\,\overrightarrow{e_3}\,)$$
$$+< \vec{Y},\ \vec{Z} > (x_1\,\overrightarrow{e_1} + x_2\,\overrightarrow{e_2} + x_3\,\overrightarrow{e_3}\,)$$

elde edilir. Buradan,

$$\left(\vec{X} * \vec{Y} *\right) * \vec{Z} = < \vec{Y},\ \vec{Z} > \vec{X} - < \vec{X},\ \vec{Z} > \vec{Y}$$

yazabiliriz.

CEVAP 2)

a) P_3 uzayı ile $\mathbb{R}_1^4$ uzayı

$$f: \quad P_3 \rightarrow \mathbb{R}_1^4$$
$$v = ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow f(v) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

fonksiyonu altında izomorf olduklarından(boyutları eşit olduklarından) W alt uzayının f altındaki görüntüsü $V = f(W)$, $\mathbb{R}_1^4$ in $\{f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4), f(v_5)\}$ alt kümesi ile gerilmiştir. Bu alt uzayın bir tabanını bulursak taban vektörlerinin f^{-1} altındaki görüntüleri W nın tabanını oluşturur. V alt uzayı

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$ matrisinin sütun uzayıdır. A matrisine elamanter satır

işlemleri uygularsak

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ matrisine satırca denk olduğu görülür. O halde V nin bir

tabanı olarak

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$ ve bunların f^{-1} altındaki görüntülerinden oluşan

$T = \{v_1 = -x^3 - 1, \quad v_2 = -x - 1, -v_3 = -x^2 - x - 2, v_4 = -x^3 + 3x - 1\}$ kümesi de W alt uzayının bir tabanıdır. Açık olarak,

$2v_1 - 2v_2 + v_3 - v_4 = -x^3 - x^2 - 2x - 1 = v_5$ dir.

b) W alt uzayının boyutu 4 olduğundan, W alt uzayının tabanını kapsayan P_3' ün bir tabanı olarak T kümesinin kendisini alabiliriz. Çünkü, boy P_3 =Boy W = 4 dür.

CEVAP 3) $P(p_1, p_2) = \left(\frac{\sigma_2' - \sigma_2}{\tau - \tau'}, \frac{\sigma_1' - \sigma_1}{\tau - \tau'}\right)$,

$Q(q_1, q_2) = \left(-\frac{\sigma_2}{\tau}, -\frac{\sigma_1}{\tau}\right)$,

$Q'(q_1', q_2') = \left(-\frac{\sigma_2'}{\tau'}, -\frac{\sigma_1'}{\tau'}\right)$ olduğunu biliyoruz.

$$p_2 = \frac{\sigma_1' - \sigma_1}{\tau - \tau'} \Rightarrow (\tau - \tau')p_2 - \sigma_1' + \sigma_1 = 0 \qquad \cdots \ (1)$$

elde edilir.

$q_2 = -\frac{\sigma_1}{\tau} \Rightarrow \sigma_1 = -q_2\tau$ ve $q_2' = -\frac{\sigma_1'}{\tau'} \Rightarrow -\sigma_1' = q_2'\tau'$ bulunur.

σ_1 ve $-\sigma_1'$ değerleri (1) ifadesinde yerlerine yazılırsa,

$(\tau - \tau')p_2 + \tau' q_2' - \tau q_2 = 0 \Rightarrow (\tau - \tau')p_2 - \tau q_2 + \tau' q_2' = 0 \ \cdots \ (*)$

bulunur. Aynı şekilde,

$$p_1 = \frac{\sigma_2' - \sigma_2}{\tau - \tau'} \text{ dan } (\tau - \tau')p_1 - \sigma_2' + \sigma_2 = 0 \qquad \cdots \ (2)$$

elde edilir.

$q_1 = -\frac{\sigma_2}{\tau} \Rightarrow \sigma_2 = -q_1\tau$ ve $q_1' = -\frac{\sigma_2'}{\tau'} \Rightarrow -\sigma_2' = q_1'\tau'$ bulunur. Bulunan

σ_2 ve $-\sigma_2'$ değerleri (2) ifadesinde yerlerine yazılırsa,

$(\tau - \tau')p_1 - q_1\tau + \tau' q_1' = 0 \Rightarrow (\tau - \tau')p_1 - \tau q_1 + \tau' q_1' = 0 \ \cdots \ (**)$

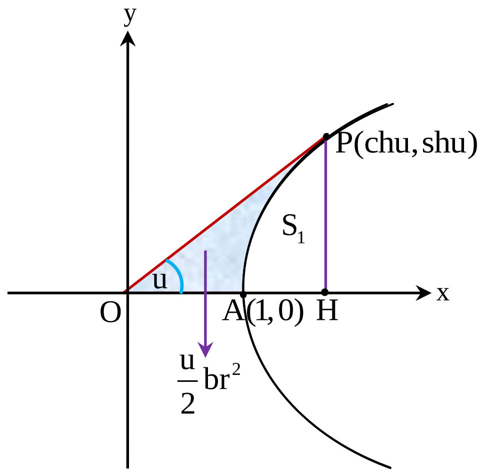
elde edilir.

$(*)$ ve $(**)$ dan

$$(\tau - \tau')P - \tau Q + \tau' Q' = 0$$

yazabiliriz. Bu ise P, Q ve Q' pol noktalarının lineer bağımlı olması demektir. Yani, bu noktalar aynı bir doğru üzerindedirler.

CEVAP 4)



Toplam alanımız A olsun. Toplam alan üçgenin alanı olup;

$$A = \frac{|OH||PH|}{2} = \frac{1}{2}chu.shu \text{ olur.}$$

Şimdi S_1 in alanını bulalım:

$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = x^2 - 1 \Rightarrow y = \sqrt{x^2-1}$ dir.

$$S_1 = \int_1^{chu} y dx = \int_1^{chu} \sqrt{x^2-1} dx = \left(\frac{1}{2}x.\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|\right)\Bigg|_1^{chu}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}chu.\sqrt{\underbrace{ch^2u-1}_{sh^2u}} - \frac{1}{2}ln\left|chu + \sqrt{\underbrace{ch^2u-1}_{sh^2u}}\right| - 0$$

$$S_1 = \frac{1}{2}chu.shu - \frac{1}{2}ln|chu + shu| \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (*)$$

$shu = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$ ve $shu = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$ olduğundan $chu + shu = \frac{e^u - e^{-u} + e^u + e^{-u}}{2} = e^u$ elde edilir.

Bu değer $(*)$ ifadesinde yerine yazılırsa

$S_1 = \frac{1}{2}chu.shu - \frac{1}{2}ln|e^u| = \frac{1}{2}chu.shu - \frac{1}{2}u$ bulunur. Buna göre, istenen alan

$$S = A - S_1 = \frac{1}{2}chu.shu - \frac{1}{2}chu.shu + \frac{1}{2}u$$

$S = \frac{1}{2}u \ br^2$ dir.

CEVAP 5)

$$<\vec{e_1},\vec{e_2}>=<(1,0),(0,1)>=0,$$

$$\|\vec{e_1}\|=\sqrt{|<(1,0),(1,0)>|}=1,$$

$$\|\vec{e_2}\|=\sqrt{|<(0,1),(0,1)>|}=1$$

dir.

$u=ln3 \Rightarrow chu=\frac{1}{2}(e^{ln3}+e^{-ln3})=\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{5}{3}$,

$$sh(ln3)=\frac{1}{2}(e^{ln3}-e^{-ln3})=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{4}{3}\text{den}$$

$\mathcal{A}(ln3)=\begin{bmatrix} ch(ln3) & sh(ln3) \\ sh(ln3) & ch(ln3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5/3 & 4/3 \\ 4/3 & 5/3 \end{bmatrix}$ elde edilir.

$$\big(\mathcal{A}(ln3)\big)\vec{e_1}=\begin{bmatrix} 5/3 & 4/3 \\ 4/3 & 5/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

ve

$$\big(\mathcal{A}(ln3)\big)\vec{e_2}=\begin{bmatrix} 5/3 & 4/3 \\ 4/3 & 5/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Lorentz anlamında $u=ln3$ hiperbolik radyanlık dönmeden sonra $\big(\mathcal{A}(ln3)\big)\vec{e_1}$ ve $\big(\mathcal{A}(ln3)\big)\vec{e_2}$ vektörleri için

$$<\big(\mathcal{A}(ln3)\big)\vec{e_1},\big(\mathcal{A}(ln3)\big)\vec{e_2}>=\frac{20}{9}-\frac{20}{9}=0,$$

$$\left\|\big(\mathcal{A}(ln3)\big)\vec{e_1}\right\|=\sqrt{\frac{25-16}{9}}=1,$$

$$\left\|\big(\mathcal{A}(ln4)\big)\vec{e_2}\right\|=\sqrt{\left|\frac{16-25}{9}\right|}=1$$

dir. Buna göre; $u=ln3$ hiperbolik radyanlık dönmeden sonra $\big(\mathcal{A}(ln3)\big)\vec{e_1}$ ve $\big(\mathcal{A}(ln3)\big)\vec{e_2}$ vektörleri birbirlerine yine diktir ve her bir vektörün boyu korunmuş olur.

Şimdi ise $P(1,1)$ noktasının $A(ln3)$ dönme matrisi altında alacağı yeni konuma bakalım:

$$\big(\mathcal{A}(ln3)\big)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5/3 & 4/3 \\ 4/3 & 5/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

olur. Böylece IL^2 de $u=ln3$ hiperbolik radyanlık dönmeden sonra $P(1,1)$ noktası merkezden(orijinden) uzaklaşmış olur.